

Travail de vacances.

Objectifs généraux :

- Opérer sur les réels (rationnels, irrationnels...)
- Résoudre des problèmes avec une ou deux inconnues.
- Simplifier des expressions littérales.
- Faire des démonstrations.
- Déterminer l'équation d'une droite.
- Etudier les positions des droites.

Fiche 1.

Exercice 1 :

Développer, réduire et ordonner :

$$A(x) = (3x - 1)^2 - (2x - 1)(-x + 3) - (2x - 3)(2x + 3)$$

$$B(x) = 2(2x + 1)^2 - (-x + 1)(1 + x)$$

Exercice 2 :

Factoriser les expressions suivantes :

$$A(x) = (2x - 4)^2 - (6 - 3x)(2x + 1) - x^2 + 4$$

$$B(x) = 18x^2 - 50 - (3x - 5)(2x - 1) - (9x^2 - 30x + 25)$$

$$C(x) = x^2 - 10x + 9$$

Exercice 3 :

Simplifier l'expression fractionnaire suivante :

$$F(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{2x^2 - 18}$$

Exercice 4 :

- 1) Résoudre le système d'équations suivant : $\begin{cases} x + y = 15 \\ 3x + 4y = 54 \end{cases}$
- 2) Quinze amis vont au restaurant. Toutes les filles sauf 3 commandent un steak-frites à 20\$ le plat.
Tous les autres prennent des spaghettis à 15\$ le plat.
La recette totale est de 255\$.
Combien y a-t-il de garçons dans ce groupe ?

Exercice 5 :

- 1) Développer, réduire et ordonner $(x - 2)(x - 4)$.
- 2) On considère le polynôme $P(x) = (x - 2)^2 + x^2 - 6x + 8$
 - a) Montrer que $P(x) = 2(x - 2)(x - 3)$
 - b) Vérifier que $P(x) = 0$ admet deux solutions dont la somme est 5.
 - c) Calculer $P(\sqrt{2} + 1)$ et donner une valeur approchée du résultat à 10^{-1} près.
 - d) Résoudre l'équation $x^2 - 6x + 8 = x\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$.

Fiche 2.

Exercice 1:

Dans le tableau ci-dessous, une seule réponse à chaque question est correcte. Ecrire le numéro de la question et la réponse correspondante **en justifiant** votre choix.

N°	Questions	Réponses		
		A	B	C
1	Si $3^{13} - x = 3^{11}$, donc $x = \dots$	$2^3 \times 3^{11}$	$3^{-13} - 3^{-11}$	3^2
2	La notation scientifique de $B = \frac{96 \times 10^{-4} \times 5 \times (10^{-2})^6}{0,3 \times 2 \times 10^{-6}}$ est	8×10^{-8}	80×10^{-7}	$9,6 \times 10^{-3}$
3	Si $a = -3\sqrt{2}$ et $b = -2\sqrt{5}$, alors :	$a < b$	$a > b$	$a = b$
4	$\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} - 2\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} - (3\sqrt{3} - 5)$ =	$2 - 2\sqrt{3}$	0	1

Exercice 2 :

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1) On donne $A = \frac{2}{2-\sqrt{3}} + \frac{2}{2+\sqrt{3}}$ et $B = \sqrt{75} - 2\sqrt{12} + \sqrt{3} + \sqrt{45}$

a) Montrer que A est un entier.

b) Calculer B^2 .

c) Montrer que $\left(\frac{B^2-57}{12}\right)^2 = 2A - 1$.

2) Résoudre $(x\sqrt{5} - \sqrt{8})(x\sqrt{5} + \sqrt{8}) = -3$.

Exercice 3 :

On donne les polynômes :

$$A(x) = 9(2x - 1)^2 - 4$$

$$B(x) = 72x^2 - 120x + 50 - (6x - 5)(x - 2) - 12x + 10$$

1) a) Développer, réduire et ordonner A(x) et B(x).

- b) Résoudre $A(x) = 5$
- 2) a) Factoriser $A(x)$ et $B(x)$.
- b) Résoudre $A(x) = B(x)$.
- 3) Soit $F(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$
- a) Pour quelles valeurs de x , $F(x)$ est-elle définie ?
- b) Simplifier $F(x)$.
- c) Résoudre $F(x) = -2$.

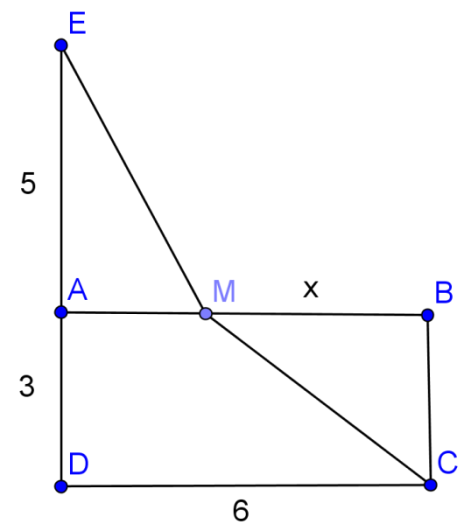
Exercice 4:

Dans la figure ci-contre, on donne un rectangle ABCD de longueur 6 et de largeur 3.

E est un point de la demi-droite [DA) tel que $AE=5$, et M est un point variable sur le segment [AB], tel que $MB=x$.

L'unité de longueur est le cm et x est un nombre réel positif plus petit ou égal à 6 cm.

- a) Calculer x pour que l'aire du triangle AME soit égale à celle du triangle BCM.
- b) Calculer x si les points E, M et C sont alignés.
- c) Dans cette partie, on prend $CM=5$ cm. Calculer x pour que $\widehat{BMC} = 60^\circ$.



Fiche 3.

Exercice 1 :

Résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{3}{x-1} - \frac{2}{y+2} = 4 \\ \frac{5}{x-1} - \frac{1}{y+2} = 9 \end{cases}$$

Exercice 2:

Pour chacun des problèmes ci-dessous, écrire un système d'équations traduisant la situation. On demande de trouver les valeurs des inconnues à l'aide de la calculatrice .(Il n'est pas demandé de résoudre les systèmes).

Les 2 parties a et b sont indépendantes.

a) Sami et Karim ont ensemble 24 billes.

Sami dit à Karim : « Si tu me donnes 2 billes, j'en aurais le double de toi ».

Combien de billes possède chacun ?

b) Un fleuriste vend des tulipes et des roses. Un bouquet de 2 tulipes et de 4 roses coûte 13000L.L. Un bouquet d'une seule tulipe et de 5 roses coûte 14000 L.L.

b1) Trouve le prix d'une tulipe et celui d'une rose.

b2) Forme un bouquet de 6 fleurs qui coûte 10 000 L.L.

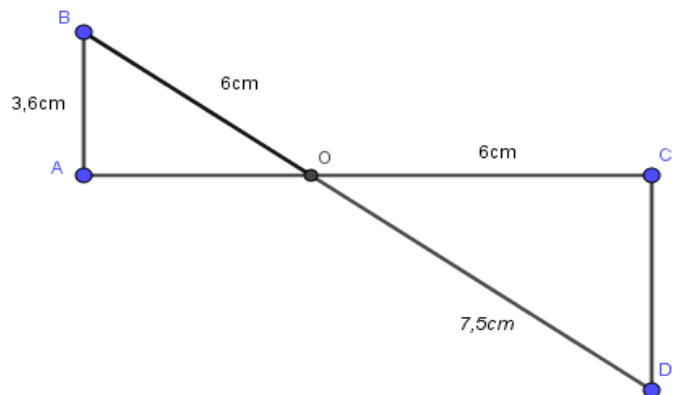
Exercice 3:

On considère la figure ci-contre (faite à main levée),

où (AB) et (CD) sont parallèles.

1) Calculer OA et CD.

2) Déduire la nature du triangle OAB .



Exercice 4:

On donne un cercle (C) de centre O et de rayon

R=4cm. Soit A un point sur (C) et M est le point symétrique de O par rapport à A. On désigne par (MT) la tangente à (C) en T.

1) Faire une figure.

2) Calculer MT et AT.

- 3) Montrer que $T\hat{M}O = 30^\circ$.
- 4) Soit (C') le cercle de centre A et de rayon 4cm. (C') rencontre (C) de nouveau en un point N.
Montrer que (MN) est tangente à (C).
- 5) Quelle est la nature exacte du quadrilatère NATO ?

Exercice 5:

Les parties a,b et c sont indépendantes

a) On donne $A = \sqrt{5} + 2\sqrt{3}$ et $B = \sqrt{10} - \sqrt{7}$.

Comparer A et B.

b) Soit $C = \frac{3^{n+4} - 2 \times 3^{n+1}}{5 \times 3^{n+1}}$

A quel ensemble de nombres C appartient-il ?

c) On donne $D = 2,\overline{3}$ et $E = \frac{2 - (1 - \frac{2}{3})^{-3}}{(2\sqrt{3})^2 \times (\frac{3}{2} - 1)}$

c.1) Montrer que $D = \frac{7}{3}$

c.2) Montrer que $D + 2E$ est un entier relatif.

Exercice 6:

Tarek habite Paris et son frère Léo bordeaux.

Ils décident de se voir le plus souvent possible. Voici le tarif de train entre les 2 villes.

Offre A : Un aller-retour coûte 80 euros

Offre B : Un abonnement annuel à 442 euros ; un aller-retour coûte alors moitié prix.

On désigne par x le nombre de voyages.

- a) Exprimer en fonction de x le montant M_1 qu'ils doivent payer s'ils choisissent l'offre A et le montant M_2 s'ils choisissent l'offre B.
- b) Aider Tarek et Léo à choisir la formule la plus avantageuse en fonction du nombre de Voyages x

Fiche 4:

Exercice 1 :

On considère les nombres suivants :

$$A = \frac{1}{5} - \frac{3}{5} \div \left(\frac{5}{3} - 7 \right)$$

$$B = \frac{0,2 \times 10^3 \times 0,05 \times (10^{-5})^2}{2 + 18}$$

$$C = \frac{3^{1000} + 3^{999}}{3^{1000} - 3^{999}}$$

- a) Ecrire A sous la forme d'une fraction irréductible.
- b) Ecrire B en notation scientifique.
- c) Montrer que C est un naturel.

Exercice 2 :

Dans le tableau ci-dessous, une seule réponse à chaque question est correcte. Ecrire le numéro de la question et la réponse correspondante **en justifiant** votre choix.

N°	Questions	Réponses		
		A	B	C
1	On donne : $A = \frac{3 \times \frac{1}{2} + \frac{3}{7}}{\frac{3}{7} - \frac{21}{25} \times \frac{5}{7}}$ La forme irréductible de A est:	$-\frac{45}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{45}{4}$
2	La forme la plus simple de $B = \frac{2\sqrt{75} \times \sqrt{48}}{\sqrt{300} - \sqrt{192} + \sqrt{5^2 - 3^2}}$ est :	$7\sqrt{3} + 4$	$120 - 60\sqrt{3}$	$60\sqrt{3} - 2$
3	$\frac{2^{2013} - 2^{2012}}{2^{2012}} =$	1	2^{2012}	2^{2013}

Exercice 3 :

Le périmètre d'un rectangle vaut 28 cm. Si on subit une réduction de 10% sur sa longueur et une augmentation de 20% sur sa largeur, le périmètre sera 28,8 cm.

- Ecrire un système de 2 équations à deux inconnues traduisant les informations précédentes.
- Vérifier que la longueur initiale de ce rectangle est de 8 cm et calculer sa largeur.

Exercice 4 :

Certain nombre de soldats est distribué dans trois zones, comme suit :

Zone A : 1 quart Zone B : 40% Zone C : 3150 soldats.

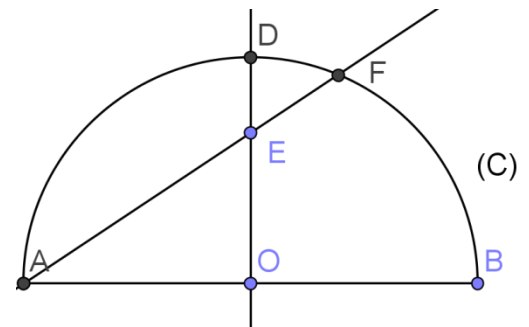
- Calculer le pourcentage des soldats dans la zone A.
 - Vérifier que le nombre total des soldats est égal à 9000.
- Plus tard , les 9 000 soldats sont redistribués mais en coefficients différents.

Les nombres des soldats dans les zones A, B et C ont été directement proportionnels à 7, 8 et 9 respectivement. Calculer le nombre de soldats dans chaque zone.

Exercice 5 :

Dans la figure ci-dessous :

- (C) est un demi-cercle de centre O, de rayon 6cm et de diamètre [AB].
- La médiatrice de [AB] coupe (C) en D.
- E est un point du segment [OD] tel que OE = 4cm.
- (AE) coupe (C) en F.



- Reproduire la figure.
- Vérifier que $AE = 2\sqrt{13}$
- Montrer que AFB est un triangle rectangle en F.
- La droite (BF) coupe la droite (OD) en K et la droite (BE) coupe la droite (AK) en I.
 - Démontrer que la droite (BE) est perpendiculaire à la droite (AK).
 - En déduire que I est un point de (C).
- La tangente en A à (C) coupe la droite (BE) en S.
 - Montrer que E est le milieu de [BS].
 - En déduire que $BS = 4\sqrt{13}$.

Fiche 5.

Exercice 1 :

Dans le tableau ci-dessous, une seule réponse à chaque question est correcte. Ecrire le numéro de la question et la réponse correspondante **en justifiant** votre choix.

N°	Questions	Réponses		
		A	B	C
1	$(\frac{3}{11})^{n+1} \times (\frac{11}{3})^n =$	1	$\frac{11}{3}$	$\frac{3}{11}$
2	$a \neq 1$ et $b \neq 0$; Si $\frac{a^2}{b} = -4$, donc $\frac{a^3 - a^2}{2ab - 2b} =$	-8	-4	-2
3	$\frac{4+\sqrt{12}}{7-\sqrt{3}} + \frac{6-9\sqrt{3}}{23}$ est :	Un entier naturel	Un irrationnel	Un nombre négatif

Exercice 2 :

Une urne contient 120 boules de quatre couleurs, où le nombre de boules bleus, jaunes , oranges et verts sont respectivement 18 ; x ; 30 et y.

La somme de 50% de boules jaunes et 25% de boules vertes donne 30 boules.

1) a. Justifier que les données ci-dessus peuvent être représentées par le système :

$$\begin{cases} x + y = 72 \\ 2x + y = 120 \end{cases}$$

b. Déduire le nombre de boules jaunes et celui de boules vertes.

2) Si cinq boules de chaque couleur sont prises, vérifier par calcul que le pourcentage de boules oranges ne sera pas changé.

Exercice 3 :

On donne dans un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$ les points $A(0 ; -3)$; $B(-6 ; 0)$; $I(-\frac{3}{2} ; \frac{3}{2})$ et la droite (d) d'équation $y = 2x - 3$.

- 1) a) Vérifier que A est un point de (d).
b) Placer A, B et I et tracer (d).
- 2) Ecrire une équation de la droite (BI).
- 3) (BI) et (d) se coupent en E. Déterminer les coordonnées du point E.
- 4) Démontrer que le triangle ABE est rectangle isocèle en A.
- 5) Soit F(0 ;6)
a) Montrer que les droites (FB) et (FE) sont perpendiculaires.
b) Montrer que les points A,B,F et E appartiennent à un même cercle dont on déterminera les coordonnées du centre et le rayon.

Exercice 4:

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$, on considère les points A(2 ;3), B(-2 ;6) et C(x ;2).

- 1) Placer A et B.
- 2) a. Ecrire l'équation de la droite (AB).
b. calculer x, sachant que $\widehat{ABC} = 90^\circ$.
Dans toutes les parties suivantes, on suppose que $x = -5$.
- 3) Calculer AB et BC. Déduire la nature exacte du triangle ABC.
- 4) La droite (AB) coupe $x'Ox$ en un point E.
a. Calculer les coordonnées de E.
b. Montrer que A est le milieu du segment [BE].

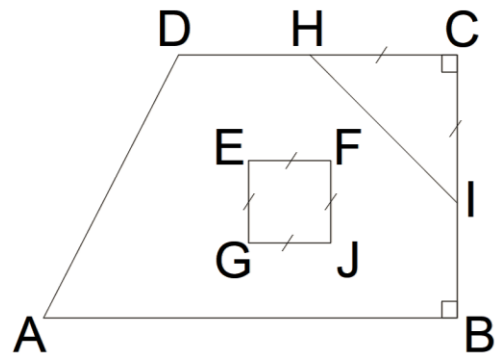
Exercice 5:

ABCD représente un jardin en forme d'un trapèze rectangle en B et C avec $AB = 6$, $BC = 5\text{m}$ et $CD = 4\text{m}$.

Un barbecue est symbolisé par un triangle rectangle isocèle CHI ou $CI = CH = x$ (exprimée en m)

Un pergola, représente un carré EBFG, a un côté de longueur x et est située au centre du jardin. La partie restante est recouverte de gazon.

Calculer la valeur x pour que la surface recouverte de gazon vaille 19 m^2 .



Fiche 6.

Exercice 1 :

Etablir les égalités suivantes :

$$(\cos x + \sin x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Exercice 2 :

Simplifier :

$$A = \cos 39^\circ + \sin 20^\circ - \sin 51^\circ - \cos 70^\circ$$

Exercice 3 :

Soit x un angle aigu.

Sachant que $\cos x = \frac{3}{5}$, calculer $\sin x$ et $\tan x$.

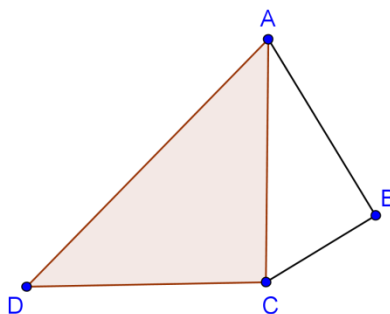
Exercice 4 :

Dans la figure ci-contre, on a :

- ABC est un triangle rectangle en B.
- ACD est un triangle rectangle en C.
- $\widehat{BAC} = 30^\circ$.
- $\widehat{ADC} = 50^\circ$.
- $AC = 8\text{cm}$.

1) Calculer BC et CD.

2) Calculer AD de 2 façons différentes.



Exercice 5 :

Sur la figure ci-contre on a :

Les points A ; C ; F et D sont alignés.

Les points B ; C et E sont alignés.

$(AB) \parallel (DE)$ et $(AE) \parallel (BF)$

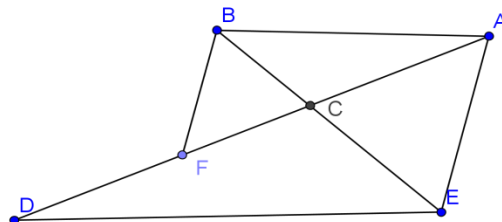
$AC = 3\text{cm}$; $BF = 2\text{cm}$; et $CD = 6\text{cm}$

1) Démontrer que $\frac{CB}{CE} = \frac{1}{2}$.

2) Calculer les longueurs CF et AE.

3) Soit le point M sur le segment [CE] tel que $CM = \frac{1}{4} CE$.

Démontrer que $(FM) \parallel (DE)$.

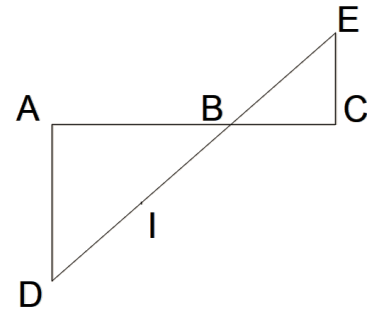


Exercice 6 :

A, B et C 3 points alignés dans cet ordre tel que $AB = 7,2 \text{ cm}$ et $BC = 2,4 \text{ cm}$.

D est le point tel que $AD = 5,4 \text{ cm}$ et $BD = 9 \text{ cm}$.

I est le milieu du segment [BD]



- 1) Trace la figure.
- 2) Montre que $IA = 4,5 \text{ cm}$
- 3) La perpendiculaire à (AB) passant par I coupe [AC] en J. Calcule IJ.
- 4) E est un point de la demi-droite [DB) tel que $DE = 12 \text{ cm}$
Montrer que les 2 droites (AD) et (CE) sont parallèles puis montrer que $CE = 1,8 \text{ cm}$.
- 5) (DJ) coupe (AI) en G.
(BG) coupe [AD] en S.
Montre que S est le milieu de [AD]

Exercice 7 :

Dans un repère orthonormé $x'Ox$ et $y'Oy$, on considère les points $A(1,5)$, $B(4, -1)$, $C(-4, -5)$ et

la droite (d) : $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

- 1) Placer les points A, B et C et tracer (d).
- 2) Vérifier par le calcul que A appartient à (d).
- 3) Montrer que les droites (d) et (BC) sont parallèles.
- 4) a) Quelle est la nature du triangle ABC ?
a) Dédurre que le triangle ABC est inscrit dans un cercle dont on déterminera la mesure de son rayon.
b) Soit I le centre de ce cercle. Montrer que I appartient à l'axe des abscisses.
- 5) La hauteur issue de B dans le triangle ABC coupe [AC] en H.
a) Ecrire l'équation de la droite (BH). b) Déterminer les coordonnées de H.

Exercice 8 :

(C) est un cercle de centre O et de rayon 6cm. [AB] est un diamètre de ce cercle.

P est un point de (C) tel que $BP = 9,6 \text{ cm}$

- 1) Tracer la figure et calculer AP.
- 2) N est un point de [OB] tel que $BN = 4 \text{ cm}$. M est le pied de la perpendiculaire menée de N sur (BP). Calculer MN et PM.
- 3) E est le milieu de [BN]. Montrer que (ME) et (PO) sont parallèles.
- 4) (PO) coupe le cercle en K. (PN) coupe (BK) en I. Montrer que I est le milieu de [BK].
- 5) Les tangentes au cercle en P et B se coupent en L. (PN) coupe (OL) en J.
a) Montrer que (OL) parallèle à (BK) b) Dédurre que $OJ = \frac{KI}{2}$

BONNES VACANCES.